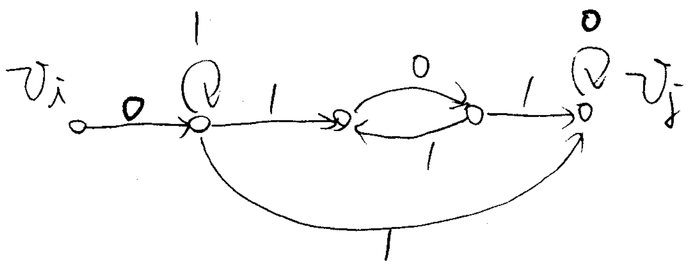
1、



2、

u_1: 2 in 1 out
u_2: 2 in 3 out
u_3: 1 in 3 out
u_4: 2 in 0 out

v_1: 2 in 0 out
v_2: 1 in 3 out
v_3: 2 in 1 out
v_4: 2 in 3 out

$\Rightarrow$
$u_1 \to v_3$
$u_2 \to v_4$
$u_3 \to v_2$
$u_4 \to v_1$

∴ 左圖與右圖為 isomorphic

3. 有 eulerian circuit 存在

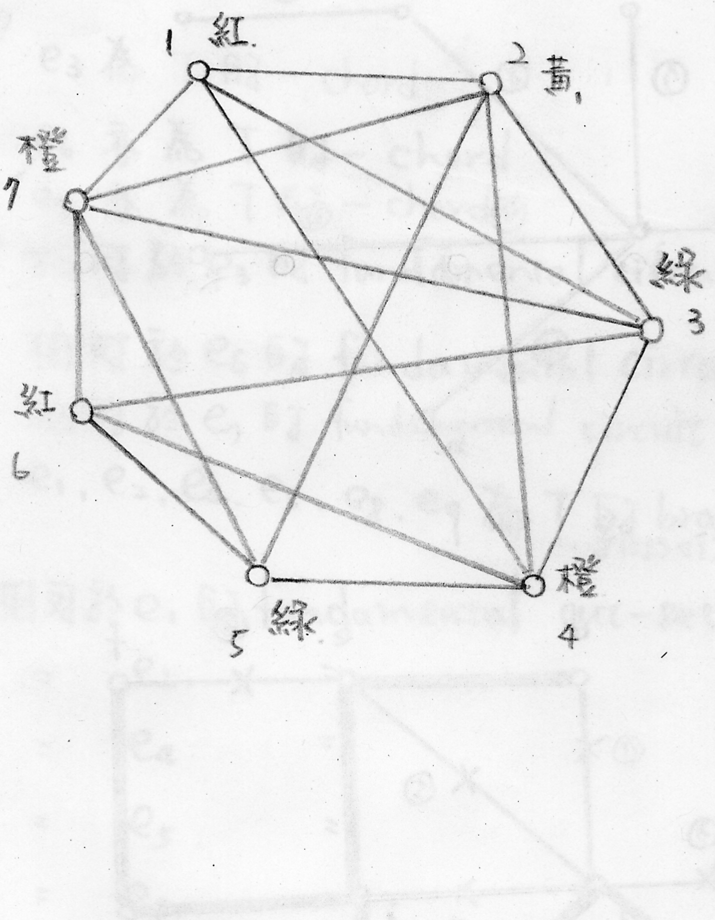
a → d → b → d → e → b → e → c → b → a

4. 先將1~7門課的 final exam 以 vertex 表示

⇒ 1 2 3 4 5 6 7

再依題意,將具有 common students 的 course 以 edge 相連

可得圖如下



依題意,相鄰的兩个点表示具有 common students 的兩門課所以不能在同一个時段,

相當於相鄰的兩个点不可塗相同顏色

⇒ proper coloring 的問題

⇒ 求此圖的最小著色數

由左圖中{1、2、3、4}形成一完全圖 K_4 所以左圖至少要用4种顏色.

再以四种顏色塗點,可發現四种顏色就可完成 proper coloring.

故此圖最小著色數為4.

因此課程安排可為

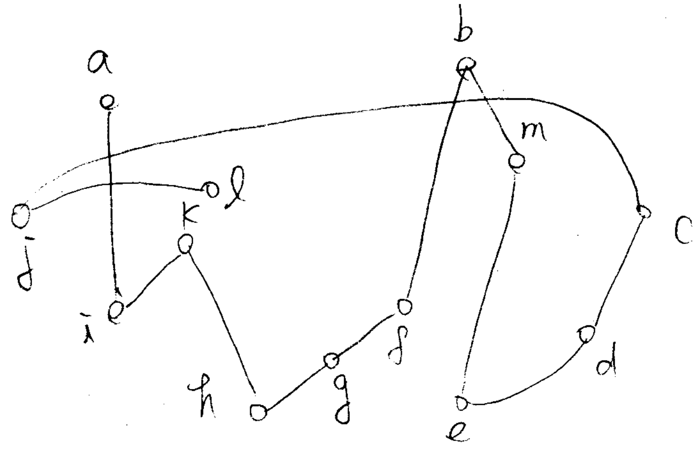
{1、6}

{2}

{3、5}

{4、7}

5.



6.

(a) ∵ 不需要知道 coin 太輕 or 太重

⇒ 利用 3-ary decision tree 來描述此問題

⇒ ∵ 4 個 coins , $n = 4$, 且 $m = 3$

⇒ $h = \lceil \log_m n \rceil = \lceil \log_3 4 \rceil = 2$

∴ 至少比較 2 次

(b) ① 先拿 coin 1 和 coin 2 比

② if (coin1 = coin 2)

then 比較 coin 1 和 coin 3

[若 coin 1 = coin 3 ⇒ coin 4 為 counterfeit coin

[若 coin 1 ≠ coin 3 ⇒ coin 3 為 counterfeit coin

if (coin 1 ≠ coin 2)

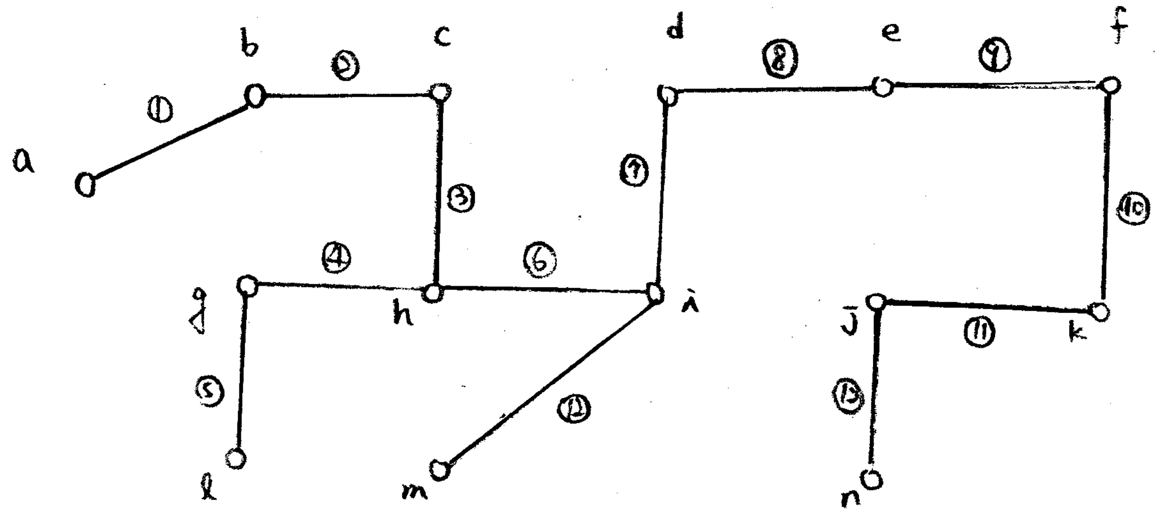
then 比較 coin 1 和 coin 3

[若 coin 1 = coin 3 ⇒ coin 2 為 counterfeit coin

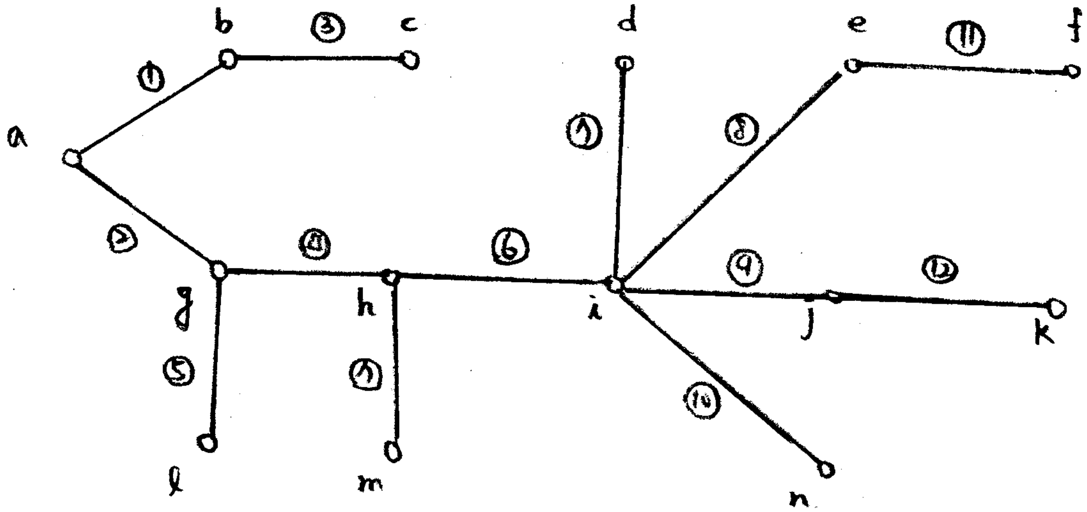
[若 coin 1 ≠ coin 3 ⇒ coin 1 為 counterfeit coin

7.

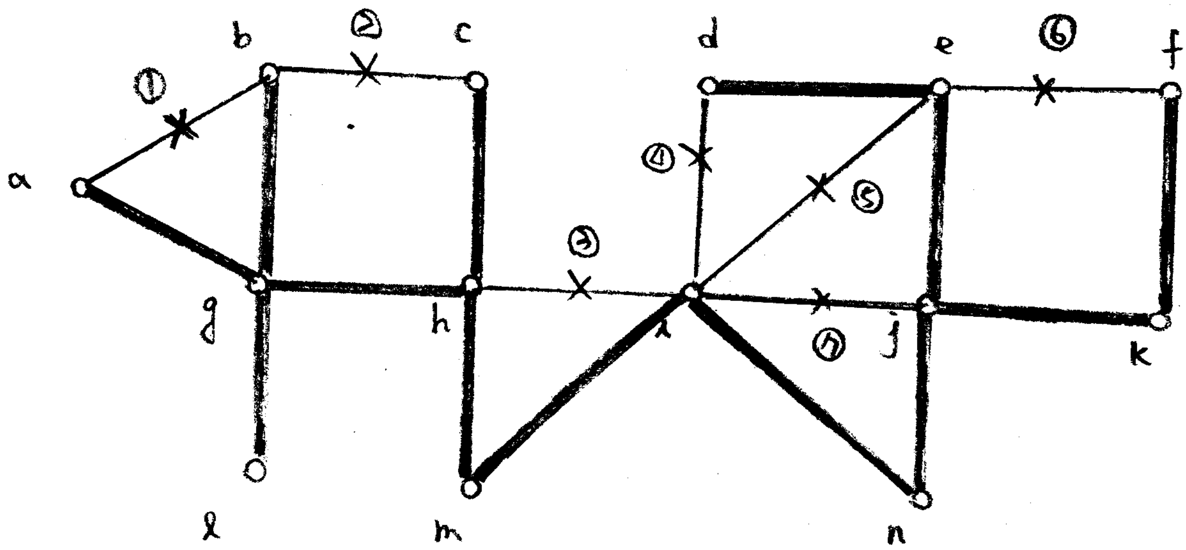
DFS



BFS

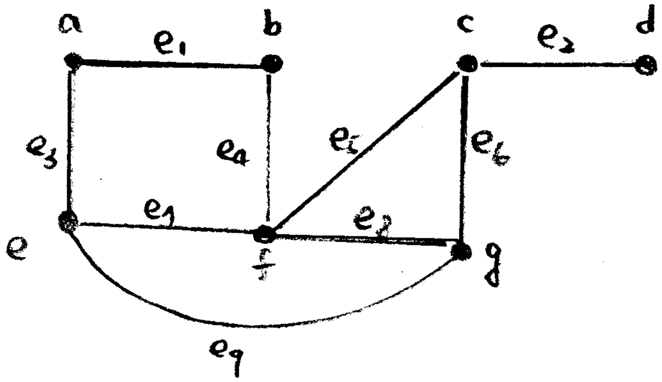


找circuit,並拿掉edge使其不具circuit

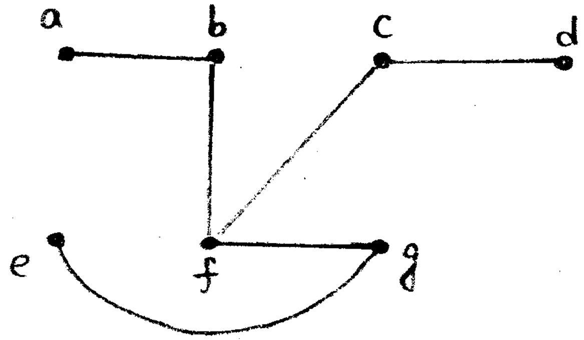


8.

由圖G與其 spanning tree 可知，並令 e_i, $i=1\sim9$ 為 G 之 edge 如下



G



令此 spanning tree 為 T

⇒ e_3 為 T 的一 chord

e_6 亦為 T 的一 chord

e_7 亦為 T 的一 chord

⇒ 相對於 e_3 的 fundamental circuit 為 $\{e_3, e_1, e_4, e_8, e_9\}$ #

相對於 e_6 的 fundamental circuit 為 $\{e_5, e_6, e_8\}$ #

相對於 e_7 的 fundamental circuit 為 $\{e_7, e_8, e_9\}$ #

⇒ $e_1, e_2, e_4, e_5, e_8, e_9$ 為 T 的 branch

⇒ 相對於 e_1 的 fundamental cut-set 為 $\{e_1, e_3\}$ #

〃 e_2 〃 〃 $\{e_2\}$ #

〃 e_4 〃 〃 $\{e_3, e_4\}$ #

〃 e_5 〃 〃 $\{e_5, e_6\}$ #

〃 e_8 〃 〃 $\{e_3, e_7, e_8, e_6\}$ #

〃 e_9 〃 〃 $\{e_3, e_7, e_9\}$ #

9.

(a)

根據 $m+(m-1)(h-1) \le$ No. of leaves in a regular m-ary tree of hight h $\le m^h$

題意: No. of leaves $= 81$

$h=4$

$\Rightarrow m+(m-1)(4-1) \le 81 \le m^4$

$\Rightarrow m+(m-1)\cdot 3 \le 81 \le m^4$

$\Rightarrow 4m-3 \le 81 \le m^4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m-3 \le 81 \Rightarrow m \le 21 \\ 81 \le m^4 \Rightarrow m \ge 3 \end{cases}$$

∴ upper bound = 21

lower bound = 3

(b)

① 利用定理：A full m-ary tree with

l leaves has $n = (ml-1)/(m-1)$ vertices

and $i = (l-1)/(m-1)$ internal vertices.

$\Rightarrow$ $i = 80/(m-1)$ internal vertices

$\Rightarrow$ i 一定为整数 $\therefore$ $\frac{80}{m-1} \in$ 整数

② 又 $\because$ 題目要求 T 是 balanced tree

$\Rightarrow$ $m^3-1+m \leq 81 \leq m^4$

由 ① ② 可推得 $m = 3$

10. 一個任意的 linear graph G。
令 v 為 G 中具有 odd degree 的 vertex 而且
H 為 G 的一個 connected component 並包含 v。
因為 H 為一 graph，而且 graph 中所有 vertex 的
degree 和為 edge 數的 2 倍，因此 H 具有偶數
個 odd degree 的 vertex
⇒ H 中存在另一個 odd degree 的 vertex w
根據 connectivity 的定義，存在一條 path 由
v 到 w 故得證